

CAMBIO EN LA FRECUENCIA NATURAL DE UNA VIGA CAJÓN SEMIMONOCASCO DEBIDO A INESTABILIDADES ELÁSTICAS

ACTIS, Marcos D., RINGENI, Pablo L., PATANELLA, Alejandro J.
UID GEMA, Depto. Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata,
Calles 1 y 47, (1900) La Plata, Argentina
email: mactis@ing.unlp.edu.ar

Palabras clave: Pandeo, Paredes delgadas, Vibraciones, Semimonocasco, Corte

Resumen. En este trabajo se analiza la influencia de la deformación de corte y el pandeo elástico en las características vibracionales de una estructura semimonocasco del tipo viga de paredes delgadas. Este análisis se realiza a través de modelos analíticos y se valida a través de una serie de ensayos estructurales. También se cuantifican los errores debido al uso de teorías clásicas con el fin de poder definir modelos y procedimientos de análisis que permitan incluir los efectos de las tensiones de corte y pandeo elástico en el estudio dinámico de estructuras de paredes delgadas. Se analizan tres modelos distintos incrementando en cada uno de ellos el nivel de complejidad: rango lineal (sin pandeo), pandeo debido a compresión del recubrimiento inferior y superior y finalmente pandeo adicional debido al pandeo por corte del recubrimiento lateral. Los resultados muestran que, dependiendo del tipo de estructura, los errores que aparecen por despreciar los efectos del pandeo y de las deformaciones por corte pueden generar diferencias mayores al 30% entre la frecuencia natural calculada en el segundo modo por métodos estándares y mayores al 50% en el tercer modo.

INTRODUCCIÓN

La teoría clásica de vibraciones por flexión en algunos casos no es apropiada para el análisis de los modos de vibrar y frecuencias naturales de vigas cajón de paredes delgadas. En particular en estas estructuras las deformaciones que provienen del corte y el fenómeno de pandeo poseen en importante influencia en la reducción de la rigidez de este tipo de vigas lo cual produce frecuencias naturales más bajas. Por tal motivo se hace necesario conocer las limitaciones de la teoría clásica es especial cuando esta deformación por corte y por la presencia del pandeo no son consideradas de manera de poder determinar la viabilidad del uso de estas teorías en el análisis dinámico de vigas de paredes delgadas.

Las estructuras de paredes delgadas son muy usadas en diferentes tipos de construcciones debido a la necesidad de reducir peso estructural, particularmente su uso es extendido en la industria aeronáutica. La importancia de este tipo de estructuras nace en su eficiencia, alta resistencia con bajo peso y su bajo costo de construcción [1]. Las estructuras de paredes delgadas fueron objeto de investigación activa en el último siglo y todavía existe un número de problemas abiertos relacionados con inestabilidades no lineales asociadas al pandeo, al pandeo lateral debido a tracción diagonal, al pandeo local, a la influencia de efectos de corte, etc, que generalmente son despreciados en las estructuras convencionales, también la influencia del daño como ser fisuras, etc. [2]. El desarrollo de diferentes métodos consistentes y robustos es también una necesidad actual. Chou y Rhodes [3] presentan una revisión exhaustiva de los resultados experimentales en estructuras de pared delgadas en el siglo 20.

En ensayos dinámicos por flexión de alas de aviones se han encontrado grandes diferencias entre las frecuencias naturales encontradas y aquellas calculadas por las teorías clásicas. Entre las razones que pueden producir estas diferencias es el acoplamiento entre los desplazamientos torsionales y las deformaciones por corte en la estructura del cajón

alar. Estos efectos son en general despreciados en los modelos clásicos de la flexión de vigas.

El elemento estructural típico de un ala es una viga cajón de paredes delgadas, donde el efecto secundario debido al corte afecte la rigidez de la viga y por consecuencia sus características dinámicas. Esta estructura es usualmente del tipo semimonocasco, optimizada para soporte altas cargas con bajo peso. Por tal motivo, que los efectos que en general son considerados de segundo orden en el análisis convencional de vigas, en este caso, son significantes en el comportamiento de los miembros estructurales del ala.

Este trabajo se enfoca en la determinación de la influencia de los efectos del corte y del pandeo en las características dinámicas de vigas del tipo cajón de paredes delgadas. Se presenta un resumen de la teoría de estructuras semimonocasco, se propone una metodología para incluir los efectos del corte y del pandeo en el comportamiento dinámico y se analiza la influencia de estos efectos en las características dinámicas de un cajón semimonocasco.

Teoría clásica para el análisis de vibraciones

La dinámica de un sistema de n grados de libertad se puede escribir a través de una única ecuación matricial. En este caso se denomina X al vector de coordenadas generalizadas del sistema, y se obtiene:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [D]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \quad \text{Ec. 1}$$

siendo $[M]$ a la matriz másica asociada a X , $[D]$ la matriz de amortiguamiento y $[K]$ la matriz elástica del sistema. Estas matrices poseen una dimensión $n \times n$,

Otra manera de escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento de sistemas con n grados de libertad (Ec. 1) puede ser en términos de los matriz flexibilidad, $[C]$, la cual es la inversa de la matriz de rigidez, es decir,

$$[K]^{-1} = [C] \quad \text{o} \quad [C]^{-1} = [K] \quad \text{Ec. 2}$$

En general, a los coeficientes de las matrices de rigidez, de flexibilidad y de amortiguamiento se los llama coeficientes de influencia [4]. El uso de estos coeficientes facilita el análisis dinámico de sistemas con muchos grados de libertad, ya que permiten escribir las ecuaciones del movimiento de manera más simple. A partir de esta definición se puede reescribir la Ec. 1 utilizando la matriz de flexibilidad, es decir, premultiplicando dicha ecuación por $[K]^{-1}$. En este caso, despreciando los efectos de amortiguamiento, se obtiene la Ec. 3. En este tipo de estructuras metálicas se desprecia en general el amortiguamiento ya que no existe disipación de energía en el movimiento oscilatorio de la misma.

$$\begin{aligned} [K]^{-1}[M]\{\ddot{X}\} + [K]^{-1}[K]\{X\} &= 0 \\ [C][M]\{\ddot{X}\} + \{X\} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3}$$

La solución de la ecuación de la dinámica del sistema, se puede expresar como,

$$\left(\frac{1}{\omega^2} [1] - [[C][M]]^{-1} \right) \cdot \{X\} = \{0\} \quad \text{Ec. 4}$$

Los autovalores de esta matriz dinámica, representan la raíz cuadrada de las frecuencias naturales del sistema y sus respectivos autovectores representan los modos de vibrar del sistema discretizado en cada una de las frecuencias naturales previamente halladas, a través de una relación de amplitudes del movimiento en cada una de las distintas estaciones de la discretización utilizada.

Estructuras semimonocasco

Para tener en cuenta el efecto de la deformación por corte en la determinación de las frecuencias naturales de la estructura semimonocasco [5] en análisis, se considera que los largueros solo pueden soportar cargas axiales, las costillas solo soportan cargas en su plano y el recubrimiento absorbe el esfuerzo de corte. Estas hipótesis se muestran en la Figura 1.

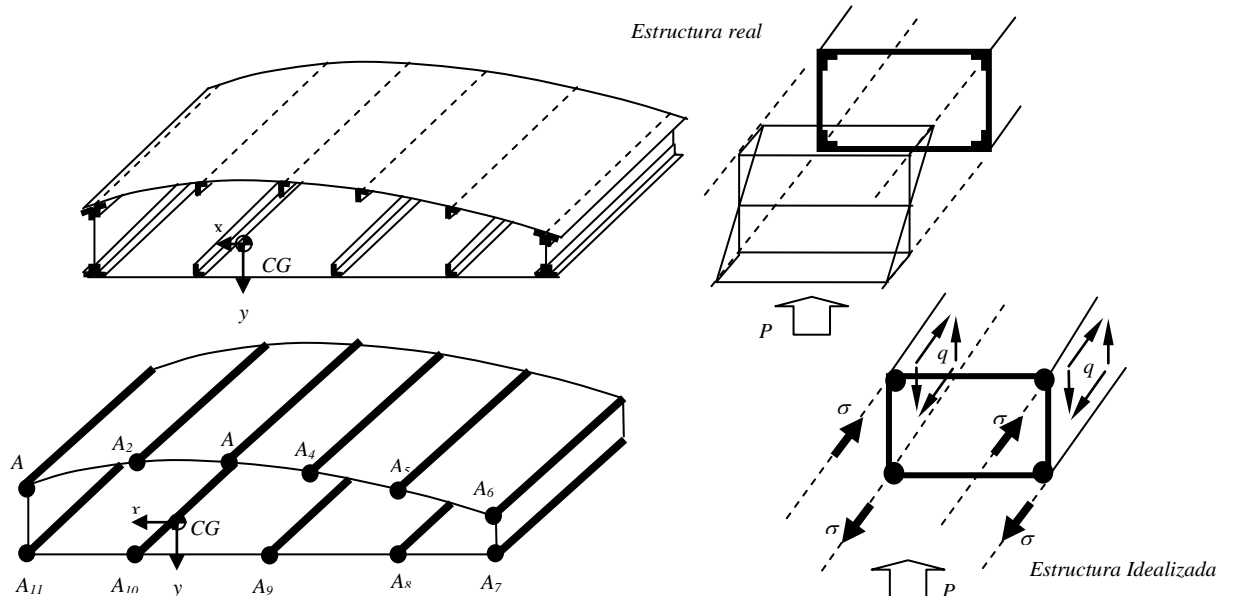


Figura 1.- Idealización de la viga

A_i representa la contribución del alma o recubrimiento en los largueros. Esta contribución puede ser obtenida de la distribución de tensión normal [7], de los efectos de pandeo (ancho colaborante) [6-8] o debido a otros efectos.

Análisis de vibraciones de una viga cajón de paredes delgadas

En general, se pueden determinar los coeficientes de flexibilidad a partir de analizar el desplazamiento de la estructura en un punto determinado bajo la aplicación de una carga conocida. En el caso de estructuras semimonocasco del tipo cajón con paredes delgadas, sin considerar los efectos del corte, se tiene que el momento flector que define los coeficientes c_{ij} es equilibrado por las cargas axiales que actúan sobre los refuerzos longitudinales (largueros) del cajón, según lo indicado en la teoría semimonocasco [7]. De esta manera, se tiene:

$$c_{ij} = \sum_1^4 \int_0^L \frac{N_i N_j}{E A} dx \quad \text{Ec. 5}$$

siendo N_i y N_j los esfuerzos axiales que actúan sobre los refuerzos longitudinales, los cuales son determinados a partir de aplicar una carga unitaria en dirección vertical en el centro de corte de la sección para cada uno de los refuerzos longitudinales que integran la viga A representa la sección de cada uno de estos refuerzos longitudinales y E es el modulo de elasticidad el material, se consideran en esta expresión que existen solo cuatro refuerzos longitudinales ubicados cada uno en un vértice del cajón.

En este caso, para tener en cuenta la influencia de las deformaciones producidas por los esfuerzos de corte se necesita recalcular los coeficientes de la matriz de flexibilidad. Siendo estos,

$$c_{ij} = \sum_1^4 \int_0^L \frac{N_i N_j}{E A} dx + \sum_1^4 \frac{q_i q_j L l_t}{G t_h}$$

Ec. 6

donde, l_t la longitud transversal de la chapa en la cual actúa el corte, t_h el espesor de la chapa del recubrimiento, G el módulo de elasticidad transversal del material de las chapas del recubrimiento y L la longitud de la viga. En caso de pandear completamente la estructura el segundo termino se ve multiplicado por un factor de 2

Determinación experimental de la respuesta dinámica de una viga de paredes delgadas

Las frecuencias naturales de una estructura son medidas en general de dos maneras. Un método consiste en variar la frecuencia de excitación hasta que aparece una resonancia [10-11] utilizando un vibrador electrodinámico. Esta técnica debe ser implementada de una manera tal que la frecuencia de excitación sea independiente de las frecuencias naturales de la estructura (Figura 2).

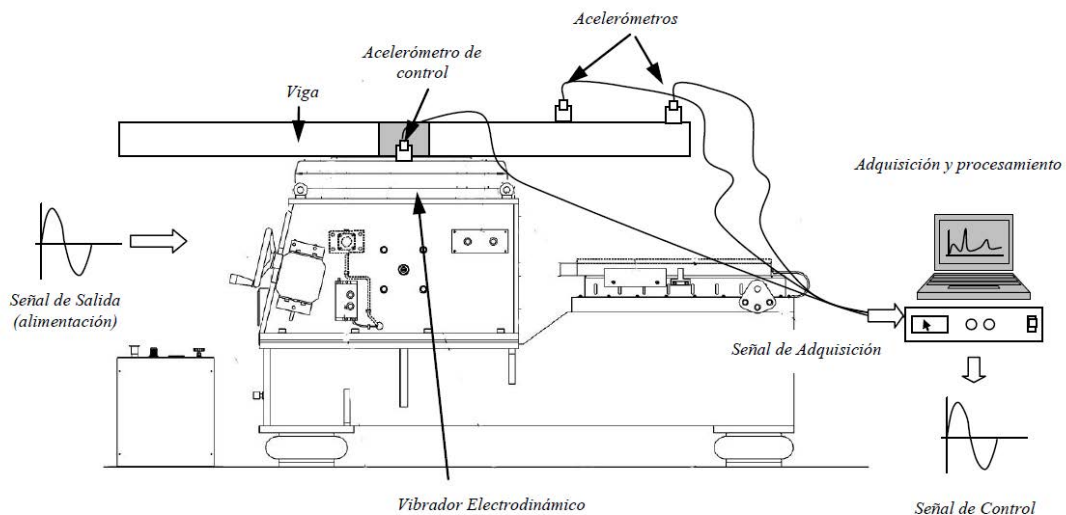


Figura 2.- Técnica de medición por vibraciones forzadas

Una técnica alternativa es por medio de la transformada de Fourier de la respuesta libre de la estructura a través de una fuerza de impacto. Esta técnica es simple y rápida, necesita poco instrumental y una simple preparación, pero requiere adquirir datos de varios acelerómetros y postprocesarlos. [10]

Las frecuencias naturales de la viga bajo análisis son determinadas analizando su comportamiento dinámica luego del impacto y procesando los datos provistos por los acelerómetros, como también utilizando un vibrador electrodinámico. En ambos casos, se utilizaron acelerómetros *Endevco 2256A-100*. Para la medición de la respuesta libre la señal fue adquirida con un osciloscopio *Fluke Scopemeter 196C*, a una frecuencia de muestreo de 1 kHz. Los datos fueron procesados utilizando *Matlab* [13] a través de su algoritmo de FFT [14]. La Figura 3 muestra dos señales típicas y su correspondientes espectro obtenido de la viga con la técnica de medición en cuadratura [12], se muestra la respuesta medida por el acelerómetro ubicado en la estación 1 (borde libre de la viga) cuando se aplica un impacto en el mismo punto, y la señal medida por el mismo acelerómetro pero respondiendo a un impacto en la estación 3 (punto medio de la viga).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se analizaron tres casos diferentes que representan tres comportamientos distintos de la estructura.

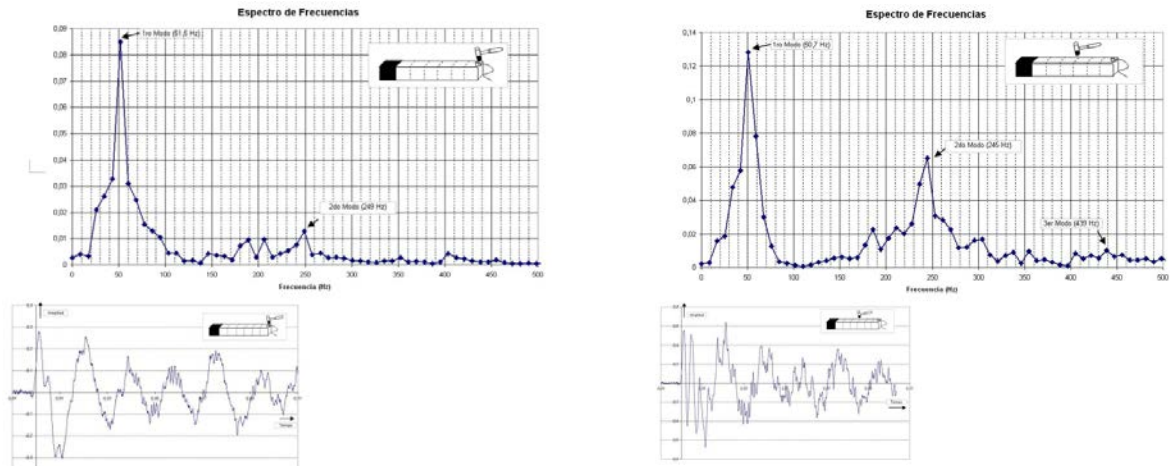
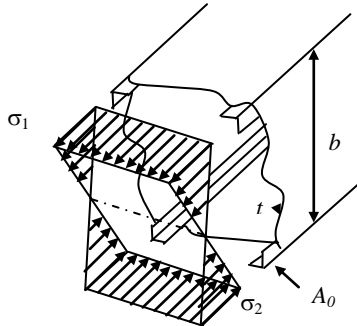


Figura 3.- Aceleraciones y espectro obtenido con la técnica de medición en cuadratura

En el primer caso, las frecuencias naturales se calcularon considerando que la estructura se encuentra en un régimen lineal elástico, sin inestabilidades (pandeo) del recubrimiento. Esta condición aparece a bajas aceleraciones (pequeñas amplitudes de vibración). La Tabla 1 muestra los valores calculados de las primeras tres frecuencias naturales considerando solo la contribución de la flexión (como en la teoría clásica) y considerando los efectos lineales de la contribución de la flexión y del corte.

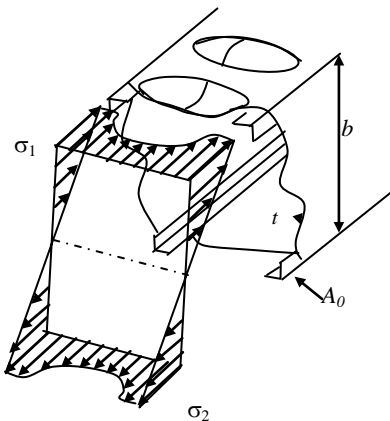


$$A_{ef} = \frac{bt}{6} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + 2 \right)$$

Ec. 7

Figura 4.- Caso 1 - Lineal

La segunda condición, que corresponde a una condición de aceleración moderada, que produce un comportamiento no lineal debido al pandeo de las paredes superiores e inferiores cuando están sometidas a fuerzas de compresión. En este caso las placas superiores e inferiores fallan por compresión y su contribución a la rigidez de la viga se modifica. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 1 y el área efectiva en la Ec. 8,



Para las placas laterales
(Flexión solamente)

$$A_{ef} = \frac{bt}{6} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + 2 \right)$$

Ec. 8

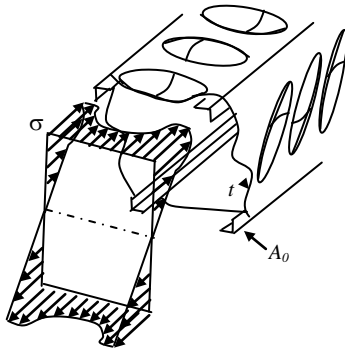
Para las placas pandeadas (superior e inferior)

(compresión solamente)

$$A_{ef} = 20t^2$$

Figura 5.- Caso 2 – Pandeo de las paredes superiores e inferiores

En la tercer condición, la cual aparece a altas aceleraciones, el comportamiento es analizado considerando no linealidades debido al pando no solo del recubrimiento superior e inferior sino también del recubrimiento lateral que están sometidas a corte y flexión, produciendo un cambio en la rigidez de la viga acorde a este fenómeno. Los desplazamiento se encuentran detalladas en la Tabla 1 pero la deformación por corte del recubrimiento es dos veces la de los casos previos (Tabla 1). Esta mayor contribución a al deformación de la viga es causada por el campo de tracción diagonal producto del cambio de mecanismo resistente del recubrimiento lateral.



$$A_{ef} = 20r^2 \quad \text{Ec. 9}$$

Figura 6.- Caso 3 – Pandeo de todo el recubrimiento

En cada caso individual, los valores de los C_{ij} fueron calculados siguiendo el procedimiento descrito con anterioridad para una estructura idealizada usando el área efectiva en presentada en cada caso. El set completo de valores es presentado por Actis [16].

Los modos de vibrar de la viga en el Caso 3 (pandeo de todo el recubrimiento) se muestran en la Figura 7, donde se muestra la diferencia entre los resultados considerando o no (teoría clásica) los efectos del corte.

Se puede ver, a los largo de las diferentes formas modales, el incremento de la influencia del corte en los modos mas altos. En la Figura 7a, el primer modo muestra un leve cambio en la deformación elástica considerando los efectos del corte, mientras que la frecuencia natural solo varía en un 10%. En las respuestas modales correspondientes al segundo y tercer modo (Figura 7b and Figura 7c), la diferencia de considerar o no el corte en el cálculo de la dinámica es por encima del 50% y el desplazamiento entre el los nodos y antinodos es apreciable. Este fenómeno se debe a que la contribución del corte en la matriz rigidez es constante mientras que la contribución del momento flector es más importante en el primer modo y decrece rápidamente para los modos más altos. La contribución del corte es más alta en los puntos de inflexión de la deformada de la viga por lo que despreciar estos efectos tal cual se produce en la teoría clásica puede producir errores severos si es aplicada sin un previo análisis.

La Tabla 2 presenta las frecuencias calculadas analíticamente para el Caso 3 considerando la flexión, el corte y el pandeo de las paredes del recubrimiento. Estos valores son comparados con aquellos encontrados experimentalmente donde se pude ver que los resultados de los cálculos realizados con la hipótesis planteadas en este trabajo representan con un gran grado de exactitud los resultados experimentales. La Tabla 2 también muestran la que relación entre el segundo modo y el primero es de 4.55 ($f_2/f_1 = 4.55$) y entre el tercero y el primero es de 8.53 ($f_3/f_1 = 8.53$). Estas últimas relaciones puede ser comparadas con la teoría clásica reportados en [15] para una viga libre-empotrada, los cuales son $f_2/f_1 = 6.36$ y $f_3/f_1 = 17.53$. Existen diferencia significantes que pueden llevar a grandes errores cuando la teoría clásica es utilizada para calcular las frecuencias naturales de una viga de paredes delgadas.

Tabla 1– Frecuencia natural calculada analíticamente paraca los diferentes casos

	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
Modo	Flexion	Flexion y corte	Flexion	Flexion y corte	Flexion	Flexion y corte
1 ^{er}	67.04 Hz	62.35 Hz	58.2 Hz	55.1 Hz	56.8 Hz	51.3 Hz
2 ^{do}	413.54 Hz	286.32 Hz	359.3 Hz	266.0 Hz	350.5 Hz	219.7 Hz
3 ^{er}	1146 Hz	603.13 Hz	995.9 Hz	574.9 Hz	971.5 Hz	449.2 Hz

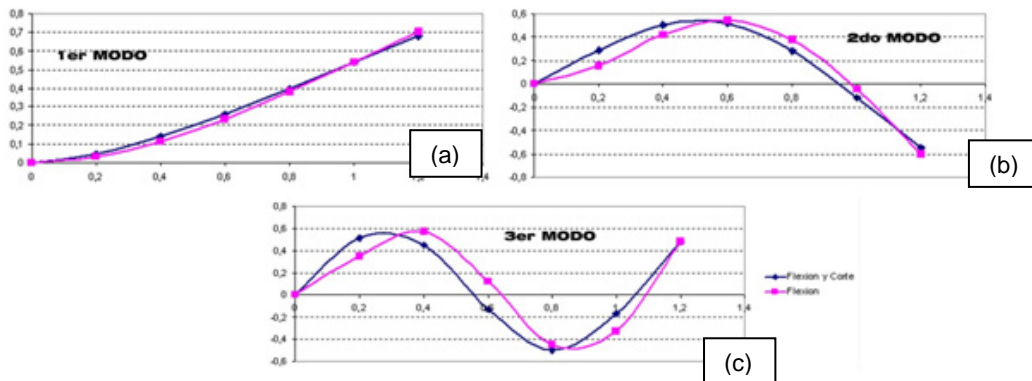


Figura 7.- Caso 3 – Formas modales

Tabla 2.- Frecuencias naturales encontradas experimentalmente

	Caso 3 Flexión y corte	Técnica de la respuesta libre	Técnica de la respuesta forzada	$f(\text{modo}) / f(\text{primermodo})$ Analítico	$f(\text{modo}) / f(\text{primermodo})$ Experimental	$f(\text{modo}) / f(\text{primermodo})$ Teoría Clásica
1 ^{er} Modo	51.3 Hz	51.1 Hz	50 Hz	1	1	1
2 ^{do} Modo	219.7 Hz	247 Hz	240 Hz	4.55	4.28 (libre) 4.83 (forzada)	6.36
3 ^{er} Modo	449.2 Hz	424.5 Hz	-----	8.53	8.31 (libre)	17.53

CONCLUSIONES

Este trabajo muestra la influencia del corte y del pandeo en las frecuencias naturales y los modos de vibrar de una estructura viga semimonocasco. La viga cajón seleccionada fue construida de manera tal de evidenciar estos efectos, las paredes pandean bajo corte y compresión ya con el propio peso de la estructura. De esta manera los efectos no lineales en estudio están presentes en los ensayos.

En muchos casos el primer modo es elegido como el límite superior o como la condición de falla de la estructura, en estos casos los errores en la determinación del segundo modo y modos superiores no es crítica. A pesar de eso, existen estructuras que, debido a su diseño, peso y otras restricciones, trabajan bajo una excitación más allá del primer modo. Un ejemplo típico son los palas de los helicópteros y otras estructuras flexibles rotantes. En estos casos es necesario contar con una buena precisión para el cálculo de los modos más altos y sus correspondientes frecuencias, considerando la influencia del corte y del pandeo local de cada elemento. En estos casos, los métodos propuestos en este trabajo pueden ser aplicados.

La influencia de la deformación por corte afecta la determinación de los modos de vibrar más altos. Este efecto reduce considerablemente los valores de las frecuencias naturales con respecto a aquellas calculadas cuando se desprecian los efectos del corte y pueden llegar a diferencias de hasta el 30% en el segundo modo y mayores del 50% para el tercer modo. Estas diferencias son mayores para las frecuencias más altas porque la viga se deforma en los modos mayores cambiando de signo la curvatura de su eje neutro. Esto produce que la deformación por corte sea más importante comparada con la deformación por flexión. Este efecto produce la reducción de la rigidez efectiva de la viga en los modos más altos.

Referencias

- [1] Davis J.M. 2000. Recent research advances in cold-formed steel structures. *Journal of Constructional Steel research*, 55(1-3): 267-288.
- [2] Bažant Z.P. 2000. Structural Stability. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 55-67.
- [3] Chou S. M. and Rhodes J., 1997, Review and compilation of experimental results on thin-walled structures, *Computers & Structures*. Vol. 65, 1: 47-67.
- [4] M.L. James, G.M. Smith, Vibration of Mechanical and Structural Systems, J.C.Wolford, P.W. Whaley, 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, 1994
- [5] B.K. Donaldson *Analysis of Aircraft Structures*, 1st Edition, , McGraw-Hill, 1993
- [6] E.F. Bruhn 1973 *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, 2nd Edition, , Jacobs Publishing, Inc.
- [7] E. Sechler and L. Dunn 1942 *Airplane Structural Analysis and Design*, 1st Edition, John Wiley & Sons, Inc,
- [8] T.H.G.Menson 2003 *Aircraft Structures for Engineering Students*, 3rd Edition, , Butterworth Heinemann.
- [9] Theory of Vibration, W. Thompson, Prentice-Hall Int.,1972
- [10] Shock and Vibration Handbook, C.M. Harris, C.E. Crede, McGraw Hill Book Company, 1961
- [11] Practical application of the rapid frequency sweep technique for structural frequency response measurement, White R. G. and Pinnington R. J., 1982 , *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, pp 179-199
- [12] Structural Testing Part II "Modal Analysis Simulation", Ole Dossing, Brüel&Kjær, 1988
- [13] Mathworks Matlab Software Manual
- [14] Porat, Boaz, A course in digital signal processing,- New York: John Wiley & Sons, 1997
- [15] Structural Vibration: Analysis and Camping, C.F. Beards, John Wiley & Sons, 1996
- [16] Estudio de la variación de propiedades mecánicas de estructuras de paredes delgadas ante la presencia de inestabilidades elasto-plásticas, Tesis de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 2007