APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE MOMENTOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES

Pintarelli María B. † y Vericat Fernando ‡

Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI), Universidad Nacional de La Plata
mariabea@mate.unlp.edu.ar

† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina,
‡ Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB) CONICET-La Plata, Argentina.

Resumen: Varios investigadores, (por ejemplo [2] cap. 7), han considerado problemas relacionados con la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad \forall (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^2 \times R_+$$

y los han resuelto aplicando técnicas de problema de momentos. Además es conocido que puede aplicarse la transformación de Laplace para resolver ecuaciones en derivadas parciales, como es el caso de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

con a constante y condiciones iniciales

$$u(0,t)=F(t), \quad u(x,0)=0, \ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0, \quad \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} u(x,t)=0$$

Consideramos aquí el problema de hallar una función $F(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=-G(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \qquad (t,x)\in R^+\times R^+ \qquad (1)$$

una ecuación en derivadas parciales de primer orden cuasilineal, con las condiciones de contorno

$$F(t,0)=g(t) \qquad\qquad F(0,x)=F_{\text{inicial}}(x)$$

En este trabajo aplicamos un enfoque, a nuestro entender novedoso, que combina ambas técnicas para resolver este problema.
Utilizando la transformada bidimensional de Laplace se transformará (1) en un problema de momentos de Hausdorff bidimensional.
Se encontrará una solución aproximada y se acotará el error de la solución estimada utilizando las técnicas sobre problema de momentos bidimensional.

También se mostrará que (1) es equivalente a resolver una ecuación integral de Fredholm de primera especie.

Palabras claves: problema de momentos, densidad bi-dimensional, estabilidad de la solución, ecuaciones integrales.
2010 AMS Subjects Classification: 44A60 – 49N45

1. INTRODUCCIÓN

El problema de momentos de Hausdorff bidimensional consiste en recobrar una función $f(x,y)$ dados sus momentos

$$\mu_{ij} = \iint_I x^i y^j f(x,y)dxdy \qquad i, j = 0,1,2,.... \qquad (2)$$

donde $I = (0,1)\times(0,1)$.

Existe solución cuando $\sum_i \sum_j a_{ij}\mu_{ij} > 0$ para todo polinomio $P(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j$ tomando valores no negativos para todo $(x,y) \in I$ ([2],cap. 1, teorema 1.1).

Si consideramos soluciones para este problema que pertenecen a $L^2(I)$, un teorema de exactitud de la solución aproximada por el método de expansión truncada, asumiendo que los datos $\{\mu_{ij}\}$ de la ecuación (2) podrían contener algún error, sería el siguiente [1], [3]

2. TEOREMA DE EXACTITUD

Teorema Supongamos que la función $f(x,y)$ en $L^2(I)$ verifica para algún N, ε y E las condiciones

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\int_0^1\int_0^1 x^i y^j f(x,y)dxdy - \mu_{ij}\right|^2 \le \varepsilon^2 \qquad \text{y} \qquad \int_0^1\int_0^1 \left[f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)\right]dxdy \le E^2$$

Entonces

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y) - p_N(x,y)|^2 dxdy \le \min\left\{\varepsilon^2 tr\left(UU^T\right)\sum_{i=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{N^*}\left|\left(C_{ij}\right)\right|^2 + \frac{E^2}{2(N^*+1)}, N^* = 1,2,...,N\right\}$$

donde $p_N(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$ siendo $\{\varphi_{ij}\}$ base ortonormal de polinomios de Legendre $\lambda_{ij} = tr\left(U^T C_{ij}\right)$ $U = \left(\mu_{ij}\right)_{i,j=1,2,...,N}$ C_{ij} matriz cambio de base

$p_N(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$ sería la solución aproximada por el método de expansión truncada.

3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Escribimos la ecuación diferencial (1) como $u_t = -G(t)u_x$. Asumimos que $G(t)$ tiene derivada continua.

Si aplicamos la transformada de Laplace con respecto a *x*:

$$L_x(u_t) = -G(t)L_x(u_x) \qquad (3)$$

donde

$$L_x(u) = \int_0^{\infty} u(t,x) e^{-\xi x} dx = U(t,\xi) \qquad (4)$$

Entonces como

$$L_x(u_x) = \xi\, L_x(u) - u(t,0) \qquad \text{y} \qquad L_x(u_t) = \frac{\partial}{\partial t} L_x(u)$$

reemplazando en (3) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_x(u) = -G(t)\left[\xi\, L_x(u) - u(t,0)\right]$$

O también

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,\xi) = -G(t)\left[\xi\, U(t,\xi) - u(t,0)\right]$$

Considerando a ξ fijo, escribimos

$$U'(t,\xi) = -G(t)\left[\xi\, U(t,\xi) - u(t,0)\right]$$

Tenemos entonces una ecuación diferencial ordinaria en la variable *t* de la forma

$$U'(t,\xi) + P(t,\xi)\, U(t,\xi) = Q(t)$$

Donde

$$P(t,\xi) = \xi G(t) \quad \text{y} \quad Q(t) = G(t) u(t,0)$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$U(t,\xi) = \frac{1}{I(t,\xi)}\left[\int I(t,\xi) Q(t) dt + C\right] \qquad \text{siendo} \qquad I(t,\xi) = e^{\int P(t,\xi) dt}$$

Por lo tanto

$$U(t,\xi) = \frac{1}{I(t,\xi)}\left[\int I(t,\xi) G(t) u(t,0) dt + C\right] \qquad I(t,\xi) = e^{\int \xi G(t) dt}$$

Para determinar C planteamos

$$U(0,\xi) = L_x(u(0,x)) = \int_0^{\infty} u(0,x) e^{-\xi x} dx = \frac{\int I(t,\xi) G(t) u(t,0) dt\Big|_{t=0} + C}{I(0,\xi)} \quad (\text{si } I(0,\xi) \neq 0)$$

Luego de hallar $U(t,\xi)$ multiplicamos ambos miembros de (4) por e^{-st} e integramos con respecto a *t*:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u(t,x) e^{-\xi x} e^{-st} dx dt = \int_0^{\infty} U(t,\xi) e^{-st} dt = UI(s,\xi) \qquad (5)$$

Por lo tanto $UI(s,\xi)$ es la transformada bidimensional de Laplace de $u(t,x)$.

Consideramos el cambio de variable $v = e^{-t}$ y $w = e^{-x}$. Entonces la transformada (5) puede ser escrita

$$\int_0^1\int_0^1 v^{s-1}w^{\xi-1}u(-\ln v, -\ln w)dvdw = \int_0^1\int_0^1 v^{s-1}w^{\xi-1} f(v,w)dvdw = UI(s,\xi) \qquad (6)$$

Para $s = m+1,\ \xi = n+1$ la ecuación (6) da

$$\int_0^1\int_0^1 v^m w^n f(v,w)dvdw = UI(m+1, n+1) = \mu_{mn} \qquad m,n = 0,1,2,.... \qquad (7)$$

Entonces (1) es equivalente a la inversión de la transformada de Laplace (5) , y la inversión de ésta es equivalente al problema de momentos de Hausdorff bidimensional (7).

En el caso de ser $f(v,w) \in L^2(I)$ se resuelve el problema con el método de la expansión truncada donde la solución aproximada será $p_N(v,w) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda_{mn}\varphi_{mn}(v,w)$, con $\varphi_{mn}(v,w) = l_m(v)l_n(w)$, $l_m(v)$ polinomio de Legendre en $(0,1)$ de grado *m*.
Entonces $q_N(t,x) = p_N(e^{-t}, e^{-x})$ aproxima la solución de (5), por lo tanto también aproxima la solución de (1).

Aplicando el teorema de estabilidad se llega a

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |u(t,x) - q_N(t,x)|^2 dtdx \le \min\left\{\varepsilon^2 tr\left(UU^T\right)\sum_{i=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{N^*}\left|\left(C_{ij}\right)\right|^2 + \frac{E^2}{2(N^*+1)}, N^* = 1,2,...,N\right\}$$

donde E^2 es una cota para

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left[(e^t)^2 u_t^2(t,x) + (e^x)^2 u_x^2(t,x)\right]e^{-t}e^{-x}dtdx$$

4. EJEMPLO NUMÉRICO

Partimos de la función $F(t,x) = ce^{\left(-3t^2+x/12\right)}$, donde *c* es la constante de normalización, la cual satisface (1) con $G(t) = 6t$. De esta forma consideramos las condiciones iniciales $F(t,0) = ce^{\left(-3t^2/12\right)} = g(t)$, $F(0,x) = ce^{\left(x/12\right)} = F_{inicial}(x)$. Entonces el problema sería hallar $F(t,x)$ tal que sea solución de

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -6t\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \qquad (t,x) \in R^+ \times R^+$$

con las condiciones iniciales

$$F(t,0) = ce^{\left(-3t^2/12\right)} = g(t) \qquad \text{y} \qquad F(0,x) = ce^{\left(x/12\right)} = F_{inicial}(x)$$

Buscamos la solución $U(t,\xi)$. Luego hallamos $UI(s,\xi)$ según (5).

Tomamos $m,n=0,1,2$ y aplicamos el algoritmo correspondiente al método de expansión truncada. Se encuentra una aproximación $p_N(v,w)$ para $f(v,w)$ en (6).

En la figura 1 superponemos las gráficas de $p_N(v,w)$ y $F(-\ln(v),-\ln(w))$.

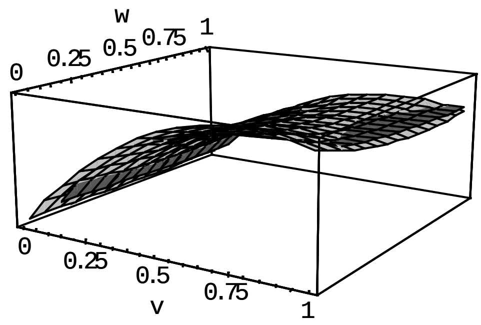

Figura 1: función aproximada y función exacta

Otra forma de escribir (1) como una ecuación integral sería la siguiente.
Nuevamente escribimos la ecuación diferencial (1) como $u_t = -G(t)u_x$
Consideramos la función

$$R(x,\tau,\xi) = e^{-x(\xi+1)-x\,Gp(\tau)} \qquad \text{con} \qquad Gp(\tau) = \int G(\tau)d\tau$$

Entonces $R_\tau - R_\xi xG(\tau) = 0$.
Y luego de algunos cálculos podemos escribir

$$\nabla^2 R = -RxG'(\tau) + Rx^2(1+G(\tau)^2)$$

Aplicamos la primera identidad de Green:

$$\iint_D u\nabla^2 R d\xi d\tau = \oint_C u\nabla R n ds - \iint_D \nabla u \nabla R d\xi d\tau$$

donde $D = [0,M]\times[0,M]$ y C es el borde de D

Desarrollando cada término, tomando límite para $M\to\infty$ y asumiendo que:

$u(\tau,\xi)$ acotada , $\int_0^M u(M,\xi)R(x,M,\xi)G(M)d\xi \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$, $\int_0^M u(\tau,M)R(x,\tau,M)xd\tau \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$

se llega a la igualdad

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^\infty u(\tau,\xi)R(x,\tau,\xi)\left[2G(\tau)^2x^2 - xG'(\tau)\right]d\tau d\xi = \\ &= xG(0)\int_0^\infty u(0,\xi)R(x,0,\xi)\,d\xi - \int_0^\infty u(\tau,0)R(x,\tau,0)\left[\left(1-G(\tau)^2\right)x+1\right]d\tau \end{aligned} \qquad (8)$$

La expresión anterior es una ecuación integral de la forma

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u(\tau,\xi) K(x,\tau,\xi)\, d\tau d\xi = \varphi(x) \qquad (9)$$

Si $u(\tau,\xi)$, $K(x,\tau,\xi)$ y $\varphi(x)$ son funciones de cuadrado integrable, entonces una forma de resolver (8) consistiría en tomar una base arbitraria $\psi_m(x)$ de $L^2(0,\infty)$ y resolver el problema de momentos generalizado

$$a'_m = \int_0^\infty \int_0^\infty b'_m(\tau,\xi) u(\tau,\xi) d\tau d\xi \quad m = 1,2,.... \qquad (10)$$

con

$$a'_m = \int_0^\infty \varphi(x)\chi_m(x)dx \qquad b'_m(\tau,\xi) = \int_0^\infty K(x,\tau,\xi)\psi_m(x)dx$$

Se puede probar que resolver (9) es equivalente a resolver (10). Se encuentra una solución aproximada de (10) para $m = 1,2,...,N$ bajo la suposición que las $b'_m(\tau,\xi)$ son linealmente independientes.

CONCLUSIONES

El método clásico de la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones en derivadas parciales implica tener que hallar la correspondiente antitransformada. En este trabajo proponemos un método alternativo basado en técnicas de problema de momentos que permiten hallar, bajo ciertas condiciones, una aproximación de la solución que no requiere de la antitransformada y también una cota para el error. Un segundo camino que hemos explorado consiste, en vez de usar transformada de Laplace, en transformar la ecuación diferencial en una ecuación integral la cual puede intentar resolverse aplicando también técnicas de problema de momentos.

REFERENCIAS

[1] D.D. ANG, R. GORENFLO, V.K. LE, D.D. TRONG, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

[2] J.A. SHOHAT, J.D. TAMARKIN, *The problem of Moments*, Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943

[3] G. TALENTI, *Recovering a function from a finite number of moments*, Inverse Problems 3 (1987), pp. 501- 517.